26-5-17

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

EXAMEN FINAL 26-05-2017

Apellido y Nombre: Legajo:

1	2	3	4	5	NOTA

1. La duración en horas de cierto componente eléctrico es una variable aleatoria cuya distribución es exponencial. Se sabe que la probabilidad de que dicho componente dure más de 24 horas es 0.6.

a) Halle la probabilidad de que un componente eléctrico dure más de 48 horas.

b) equipo posee 3 de estos componentes que trabajan independientemente. El equipo funciona si al menos una de las componentes funciona. ¿Cuál es la probabilidad de que el equipo funcione por más de 48 horas?

2. Una empresa que fabrica generadores eólicos se preocupa por el nivel de ruido medio que producen las mismas que debe ser inferior a 75 dBA. Una muestra aleatoria de 36 mediciones del nivel de ruido tiene una media de 74 dBA con una desviación estándar de 3.3 dBA. Se supone que el nivel de ruido sigue una distribución aproximadamente normal.

a) Plantee un test adecuado de nivel 0.05 para determinar si el nivel de ruido medio producido por los generadores es inferior a 75 dBA. ¿Cuál es su conclusión ?

b) De acuerdo con el resultado obtenido en a) ¿cuál es el p-valor de su conclusión?

3. Los montos porcentuales de variación diaria del Merval X se asocian con el monto Y en millones de pesos operado en acciones en un día dado. Tomando al azar pares (X,Y) supuestamente con distribución Normal, se obtuvieron los siguientes datos :

X (%)	-1,4	2,1	1,8	-1,5	0,9	-2,5	0,6
Y (10^6 $)	12,6	9,1	14,5	8,2	11,2	12,0	8,2

a) Hallar la recta de regresión de Y en función de X

b) Calcular el coeficiente de correlación e interpretar su resultado

4.

a) Asuma que X es una variable aleatoria con distribución normal. Si se toma una muestra de tamaño n, ¿cuál es la distribución de la media muestral?

b) Si no se asume que X sigue una distribución normal, ¿qué ocurre con la distribución de la media muestral? Justifique.

5. a) Test de Hipótesis: Conceptos de error de tipo I y de potencia de un test de hipótesis.

b) Si aumenta la probabilidad de cometer un error de tipo I y se mantiene invariante el tamaño de muestra, la probabilidad de cometer u error de tipo II ¿aumenta o disminuye? Justifique.

PyE UTN Final

HOJA N°

FECHA 26-5-17

① La duración en horas de cierto componente eléctrico es una v.a. cuya distribución es exponencial. Se sabe que la prob. de que dicho componente dure más de 24 horas es 0,6

a) Halle la prob. de que un componente eléctrico dure más de 48 hs

X: "duración, en horas, de cierto componente eléctrico" $X \sim Exp(\lambda)$

$P(X>24) = 0,6 = e^{-24\lambda} \rightarrow \ln(0,6) = \ln(e^{-24\lambda})$

$-\ln(0,6) = 24\lambda \rightarrow \boxed{\lambda = 0,0213}$

$\rightarrow P(X>48) = e^{-48 \cdot 0,0213} = 0,36$ $\boxed{P\ X>48 = 0,36}$

b) Un equipo posee 3 de estos componentes que trabajan independientemente. El equipo funciona si al menos uno de los componentes funcione ¿Cuál es la probabilidad de que el equipo funcione por más de 48 horas

Y = "cantidad de componentes que funcionan más de 48 horas, en un equipo de 3 componentes"

$Y \sim Bi(3, 0.36)$

$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y<1) \overset{\text{discreta}}{=} 1 - P(Y=0) \underset{\text{c.A}}{=} 0,7379$

c.A $P(Y=0) = \binom{3}{0} 0.36^0 \; 0,64^3 = 0,2621$

$$\boxed{P(Y \geq 1) = 0.7379}$$

Sylvana

NOTA

② Una empresa que fabrica generadores eólicos se preocupa por el nivel de ruido medio que producen los mismos, que debe ser inferior a 75 dBA. Una muestra aleatoria de 36 mediciones del nivel de ruido tiene una media de 74dBA con una desviación estándar de 3,3dBA. Se supone que el nivel de ruido sigue una distribución aproximadamente normal

a) Plantee un test adecuado de nivel 0.05 para determinar si el nivel de ruido medio producido por los generadores es inferior a 75 dBA ¿Cuál es su conclusión?

$\alpha = 0.05$
$n = 36$
$\bar{X} = 74$
$s = 3,3$

$H_0 : \mu = 75$ vs $H_1 : \mu < 75$

$e_m = \frac{\bar{X} - 75}{3,3/\sqrt{36}} = \frac{\bar{X} - 75}{0,55} \sim t_{35}$ bajo H_0

Rechazo H_0 si $T_{obs} < t_{35,\, 0.95}$

$T_{obs} = \frac{74-75}{0.55} = -1,818$

$t_{35,0.95} = -t_{35,005} = -1,69$

$t_{obs} < t_{35,0.95} \rightarrow$ $\boxed{\text{Rechazo } H_0}$

No hay evidencia para asegurar que el nivel de ruido es 75 dBA

b) De acuerdo con el resultado obtenido en a) ¿cuál es el p-valor de su conclusión?

$T_{obs} = -1,818 \xrightarrow{n=36} 0,025 < p\text{-valor} < 0,05$

③ Los montos porcentuales de variación diaria del Merval X se asocian con el monto Y en millones de pesos operados en acciones en un día dado. Tomando pares al azar pares (X,Y) supuestamente con dist. normal, se obtuvieron los sig. datos.

X (%)	-1,4	2,1	1,8	-1,5	0,9	-2,5	0,6
Y (10^6\$)	12,6	9,1	14,5	8,2	11,2	12,0	8,2

a) Hallar la recta de regresión Y en función de X

$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon \longrightarrow \hat{Y} = b_0 + b_1 x \overset{\text{calculadora}}{=} 10,83 + 0,014X$

$\boxed{\hat{Y} = 10,83 + 0,014x}$

b) Calcular el coeficiente de correlación e interpretar su resultado

$\rho \rightarrow$ estimador $r = 0,01 \rightarrow$ bastante cerca de 0 ∴ no se asegura correlación lineal

NOTA

HOJA N°

PyE final UTN FECHA 26-5-17

④ a) Asuma que X es una v.a. con distr. normal. Si se toma una muestra de tamaño n, ¿cuál es la distr. de la media muestral?

$$X \sim N(\mu, \sigma) \rightarrow E(X) = \mu, \quad V(X) = \sigma^2 \qquad \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$$

$$E(\bar{X}) = E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \overbrace{E(X_i)}^{\mu} = \frac{n\mu}{n} = \mu = E(X)$$

$$V(\bar{X}) = V\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \overbrace{V(X_i)}^{\sigma^2} = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n} = V(\bar{X})$$

$$\boxed{\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)}$$

b) Si no se asume que X sigue una distr. Normal ¿qué ocurre con la distribución de la media muestral? Justifique

$$\text{Si } n > 30 \rightarrow \boxed{\bar{X} \overset{a}{\underset{\uparrow \text{aproximado}}{\sim}} N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)}$$

---

⑤ a) test de Hipótesis: concepto de error de tipo I y de potencia de un test de hipótesis

$$P(\text{error tipo I}) = P(\text{rechazar Ho} \mid \text{Ho V}) = \alpha$$

$$\text{Pot. de un test} = 1 - \beta \; ; \; \beta = P(\text{error tipo II}) = P(\text{aceptar Ho} \mid \text{Ho F})$$

b) Si aumenta la prob. de cometer un error tipo I y se mantiene invariante el tamaño de muestra, la prob. de cometer un error de tipo II ¿aumenta o disminuye? justifique

Si α aumenta, n invariante $\rightarrow$ β disminuye

Sylvina

NOTA